Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Mengen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1) E seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 5, 6\}$.
Bestimmen Sie $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

Aufgabe 2 (1) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{0, 1, 2\}, \\
\Gamma_2 &= \{\, n \mid n \text{ ist eine gerade natürliche Zahl} \}\,, \\
\Gamma_3 &= \{\, n \mid n \text{ ist eine natürliche Zahl, die kleiner als 5 ist} \}\,, \\
\Gamma_4 &= \{1, 3, 6, 9, 11\}.
\end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind!

a) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma_3 \cap \Gamma_4$

b) $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 \subseteq \Gamma_2$

c) $16 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$

d) $5 \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

e) $\varnothing \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cap \Gamma_4$

f) $(\Gamma_2 \cap \Gamma_3) \cap \Gamma_4 \subseteq \varnothing$

Aufgabe 3 (1) Wir bezeichnen $\underline{n} := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

a) Wählen Sie das richtige Zeichen "$\in$" oder "$\subseteq$":
(i) $\underline{3}$? $\underline{5}$, (ii) 3 ? $\underline{5}$, (iii) $\{3\}$? $\underline{5}$, (iv) $\{2, 3\}$? $\underline{5}$.

b) Es sei $A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch:
(i) $\underline{2} \in A$, (ii) $2 \in A$, (iii) $\{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A$, (iv) $\{2, 3\} \subset A$, (v) $\{2, 3\} \in A$?

Aufgabe 4 (1) Es sei $A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 6\}$.

a) Wieviel Elemente hat A? Geben Sie A explizit an.

b) Es sei nun $B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 5\}$. Bestimmen Sie $A \cap B$, $B \cup A$, $B \setminus A$, $A \setminus B$.

Aufgabe 5 (1) Es seien Mengen A, B und C gegeben. Beschreiben Sie mithilfe der Operationen $\cup$ und $\cap$ die Mengen, die aus Elementen bestehen, die

a) in allen drei Mengen A, B und C liegen;

b) mindestens in einer der Mengen A, B oder C liegen;

c) mindesten in zwei der Mengen A, B und C liegen.

Aufgabe 6 (3) Beweisen Sie, dass die Gleichung $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ dann und nur dann gilt, wenn $C \subseteq A$ ist.

Aufgabe 7 (2) Zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

d) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Aufgabe 8 (3) Zeigen Sie, dass $A \setminus B \subseteq C$ dann und nur dann gilt, wenn $A \subseteq B \cup C$ ist.

Aufgabe 9 (2) Für alle A, B äquivalent: $A \subseteq B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$.

Aufgabe 10 Beweisen Sie:

a) $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus C$,

b) $(A \cup C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup C$.

Aufgabe 11 (3) Wie verhalten sich die Mengen X und Y ($X \subseteq Y$, $X \supseteq Y$ oder $X = Y$), falls

a) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

b) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

c) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Aufgabe 12 (2) Es seien A, B Teilmengen von U und es bezeichne $A' = U \setminus A$ und $B' = U \setminus B$. Zeigen Sie:

a) $U \setminus (A \setminus B) = A' \cup B$,

b) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$,

c) $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = A \cup B$.

Aufgabe 13 (3) Bestimmen Sie die Teilmengen A und B einer Menge U unter der Annahme, dass für alle $X \subseteq U$ gilt:

$$X \cap A = X \cup B.$$